Segunda Prova de Teoria Eletromagnética I, 14/10/2011

Nome: GABARITO

(1ª questão) *(2,0 pontos)* Considere a descrição de sistemas físicos em coordenadas cilíndricas. Em tal sistema de coordenadas, os versores $\{\hat{s}, \hat{\varphi}, \hat{z}\}$ podem ser escritos em termos dos versores $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ das coordenadas retangulares como

$$\hat{s} = \cos\varphi\,\hat{\imath} + \text{sen}\varphi\,\hat{\jmath}\,, \qquad \hat{\varphi} = -\text{sen}\varphi\,\hat{\imath} + \cos\varphi\,\hat{\jmath}\,, \qquad \hat{z} = \hat{k}\,.$$

A partir do gradiente de uma função escalar $T(s, \varphi, z)$ em coordenadas cilíndricas (ver formulário), mostre (justificando passo a passo) que o Laplaciano de T pode ser escrito como

$$\nabla^2 T = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial T}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\,.$$

(2ª questão) Considere uma casca esférica de raio R centrada na origem com uma densidade superficial de carga elétrica dada, em coordenadas esféricas, por $\sigma(\theta) = k\cos\theta$, onde k é uma constante.

(a) *(2,0 pontos)* Determine o momento de monopolo da distribuição de carga. Escreva a contribuição V_{mon} ao potencial elétrico do termo de monopolo da expansão multipolar.

(b) *(2,0 pontos)* Determine o momento de dipolo da distribuição de carga. Escreva a contribuição V_{dip} ao potencial elétrico do termo de dipolo da expansão multipolar.

(3ª questão) Uma esfera de raio R composta de material dielétrico linear e homogêneo com permissividade relativa ε_r é colocada no vácuo em um campo elétrico $\vec{E}_0 = E_0\hat{k}$ inicialmente uniforme e na direção z.

(a) *(1,0 ponto)* Mostre, a partir da equação de Poisson, que o potencial elétrico deve satisfazer a equação de Laplace no interior da esfera (apesar da presença do material dielétrico).

(b) *(1,0 ponto)* A partir da condição de contorno para o vetor deslocamento elétrico $\vec{D}$, escreva a condição de contorno a ser satisfeita pela derivada normal do potencial elétrico em $r = R$ em termos da permissividade relativa ε_r.

Sugestão: Lembrar que

$$D_\perp^{acima} - D_\perp^{abaixo} = \sigma_L,$$

onde $D_\perp$ denota a componente normal do deslocamento elétrico sobre a superfície e σ_L é a densidade superficial de cargas livres na superfície.

(c) *(1,0 ponto)* Determine o campo elétrico no interior da esfera.

(d) *(1,0 ponto)* Esboce as linhas de campo para o campo elétrico em todo o espaço (dentro e fora da esfera).

GABARITO

(1ª QUESTÃO)

$$\vec{\nabla} T = \hat{s}\,\frac{\partial T}{\partial s} + \frac{\hat{\varphi}}{s}\,\frac{\partial T}{\partial \varphi} + \hat{z}\,\frac{\partial T}{\partial z}$$

$$\nabla^2 T = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} T = \left(\hat{s}\,\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\hat{\varphi}}{s}\,\frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{z}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\hat{s}\,\frac{\partial T}{\partial s} + \frac{\hat{\varphi}}{s}\,\frac{\partial T}{\partial \varphi} + \hat{z}\,\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

<u>Termos $\partial/\partial s$</u>: $\left(\hat{s}\,\frac{\partial}{\partial s}\right)\cdot\left(\hat{s}\,\frac{\partial T}{\partial s} + \frac{\hat{\varphi}}{s}\,\frac{\partial T}{\partial \varphi} + \hat{z}\,\frac{\partial T}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 T}{\partial s^2}$

<u>Termos $\partial/\partial\varphi$</u>: $\left(\frac{\hat{\varphi}}{s}\,\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\cdot\left(\hat{s}\,\frac{\partial T}{\partial s} + \frac{\hat{\varphi}}{s}\,\frac{\partial T}{\partial \varphi} + \hat{z}\,\frac{\partial T}{\partial z}\right)$

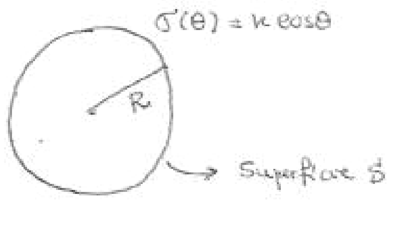
$$= \frac{\hat{\varphi}}{s}\cdot\left(\underbrace{\frac{\partial \hat{s}}{\partial \varphi}}_{=\hat{\varphi}}\,\frac{\partial T}{\partial s} + \frac{\hat{\varphi}}{s}\,\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}\right) = \frac{1}{s}\,\frac{\partial T}{\partial s} + \frac{1}{s^2}\,\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}$$

<u>Termos $\partial/\partial z$</u>: $\left(\hat{z}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\hat{s}\,\frac{\partial T}{\partial s} + \frac{\hat{\varphi}}{s}\,\frac{\partial T}{\partial \varphi} + \hat{z}\,\frac{\partial T}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$

$$\Rightarrow \nabla^2 T = \underbrace{\frac{\partial^2 T}{\partial s^2} + \frac{1}{s}\,\frac{\partial T}{\partial s}}_{=\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial T}{\partial s}\right)} + \frac{1}{s^2}\,\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 T = \frac{1}{s}\,\frac{\partial}{\partial s}\left(s\,\frac{\partial T}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\,\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}$$

(2ª Questão)



(a) Momento de monopolo: $Q = \int_S \sigma\, da' = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} k\cos\theta\, R^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta$

$$\Rightarrow Q = 2k\pi R^2 \int_0^{\pi} \underbrace{\cos\theta}_{u}\ \underbrace{\operatorname{sen}\theta\, d\theta}_{-du} = -2k\pi R^2 \int_1^{-1} u\, du = -2k\pi R^2 \left.\frac{u^2}{2}\right|_1^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{Q = 0}$$ (Momento de monopolo é nulo)

Contribuição de monopolo: $V_{mon} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overset{\nearrow 0}{Q}}{r} \Rightarrow \boxed{V_{mon} = 0}$

(b) Momento de dipolo: $\vec{p} = \int_S \vec{r}'\, \sigma(\vec{r}')\, da'$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} (R^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta)\,(R\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,\hat{\imath} + R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\,\hat{\jmath} + R\cos\theta\,\hat{k})\,(k\cos\theta)$$

$\underbrace{0 \qquad 0}_{\text{INTEGRAIS DE } \cos\varphi \text{ e } \operatorname{sen}\varphi \text{ DE } 0 \text{ a } 2\pi \text{ SE ANULAM.}}$

$$= 2k\pi R^3 \int_0^{\pi} \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, \hat{k}\ ;$$ fazemos $u = \cos\theta$, $du = -\operatorname{sen}\theta\, d\theta$

$\theta \to 0 \Rightarrow u \to 1$

$\theta \to \pi \Rightarrow u \to -1$

$$\Rightarrow \vec{p} = 2k\pi R^3 \int_{-1}^{1} u^2\, du\, \hat{k} = 2k\pi R^3 \left.\frac{u^3}{3}\right|_{-1}^{1} \hat{k} = 2k\pi R^3 \frac{[1-(-1)]}{3}\hat{k} = \frac{4}{3}k\pi R^3 \hat{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{p} = \frac{4}{3}k\pi R^3 \hat{k}}$$

Contribuição de dipolo: $V_{dip} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4}{3}k\pi R^3 \frac{\cos\theta}{r^2} \Rightarrow \boxed{V_{dip} = \frac{k}{3\varepsilon_0}\frac{R^3\cos\theta}{r^2}}$

(3ª Questão)

(a) Eq. de Poisson: $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, onde ρ engloba cargas livres e cargas ligadas. As cargas livres inexistem nesse problema $\Rightarrow \boxed{\rho_F = 0}$

Quanto as cargas ligadas:

$$\rho_b = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{MATERIAL} \\ \text{LINEAR}}}{=} -\vec{\nabla}\cdot\left(\varepsilon_0 \chi_e \frac{\vec{D}}{\varepsilon}\right) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{MATERIAL} \\ \text{HOMOGÊNEO}}}{=} -\frac{\varepsilon_0 \chi_e}{\varepsilon}\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = -\frac{\varepsilon_0\chi_e}{\varepsilon}\rho_F$$

Logo: $\rho_b \propto \rho_F \Rightarrow \boxed{\rho_b = 0}$

Assim: $\boxed{\nabla^2 V = 0}$ $\longrightarrow$ Eq. de Laplace deve ser satisfeita p/ $r \leq R$ e p/ $r \geq R$.

(b) $$D_\perp^{acima} - D_\perp^{abaixo} = \cancel{\sigma_F}^{\,0} \Rightarrow \varepsilon_{acima} E_\perp^{acima} - \varepsilon_{abaixo} E_\perp^{abaixo} = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon_0 \left(-\vec{\nabla}V_{acima}\cdot\hat{n}\right) - \varepsilon\left(-\vec{\nabla}V_{abaixo}\cdot\hat{n}\right) = 0$$

$$\Rightarrow -\varepsilon_0 \frac{\partial V_{acima}}{\partial n} + \varepsilon \frac{\partial V_{abaixo}}{\partial n} = 0 \Rightarrow \boxed{\varepsilon_r \frac{\partial V_{abaixo}}{\partial r} = \frac{\partial V_{acima}}{\partial r}}$$

(3ª Questão)

(c) Our problem is to solve Laplace's equation, for $V_{\text{in}}(r,\theta)$ when $r \leq R$, and $V_{\text{out}}(r,\theta)$ when $r \geq R$, subject to the boundary conditions

$$\left.\begin{array}{lrcll} \text{(i)} & V_{\text{in}} & = & V_{\text{out}}, & \text{at } r = R, \\[2ex] \text{(ii)} & \epsilon\dfrac{\partial V_{\text{in}}}{\partial r} & = & \epsilon_0\dfrac{\partial V_{\text{out}}}{\partial r}, & \text{at } r = R, \\[2ex] \text{(iii)} & V_{\text{out}} & \rightarrow & -E_0 r\cos\theta, & \text{for } r \gg R. \end{array}\right\} \tag{4.43}$$

(The second of these follows from Eq. 4.41, since there is no free charge at the surface.) Inside the sphere Eq. 3.65 says

$$V_{\text{in}}(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta); \tag{4.44}$$

outside the sphere, in view of (iii), we have

$$V_{\text{out}}(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta). \tag{4.45}$$

Boundary condition (i) requires that

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos\theta) = -E_0 R\cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos\theta),$$

so[10]

$$\left.\begin{array}{l} A_l R^l = \dfrac{B_l}{R^{l+1}}, \quad \text{for } l \neq 1, \\[2ex] A_1 R = -E_0 R + \dfrac{B_1}{R^2}. \end{array}\right\} \tag{4.46}$$

Meanwhile, condition (ii) yields

$$\epsilon_r \sum_{l=0}^{\infty} l A_l R^{l-1} P_l(\cos\theta) = -E_0\cos\theta - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1)B_l}{R^{l+2}} P_l(\cos\theta),$$

so

$$\left.\begin{array}{rcll} \epsilon_r l A_l R^{l-1} & = & -\dfrac{(l+1)B_l}{R^{l+2}}, & \text{for } l \neq 1, \\[2ex] \epsilon_r A_1 & = & -E_0 - \dfrac{2B_1}{R^3}. & \end{array}\right\} \tag{4.47}$$

It follows that

$$\left.\begin{aligned} A_l = B_l = 0, \qquad & \text{for } l \neq 1, \\ A_1 = -\frac{3}{\epsilon_r + 2} E_0 \quad & B_1 = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} R^3 E_0. \end{aligned}\right\} \tag{4.48}$$

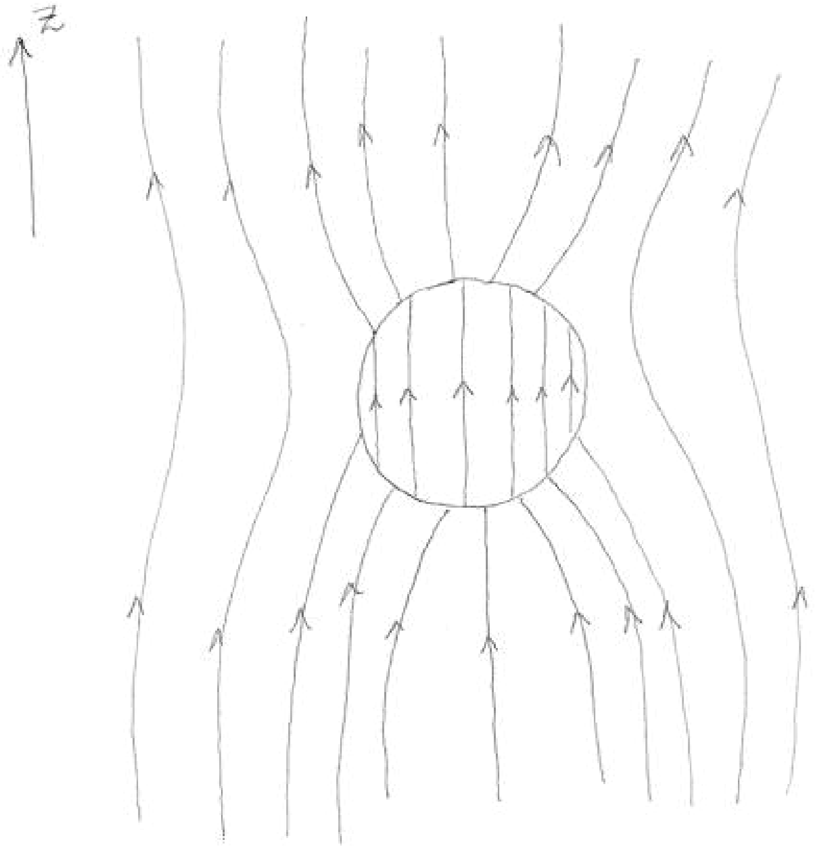
Evidently

$$V_{\text{in}}(r, \theta) = -\frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} r \cos\theta = -\frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} z,$$

and hence the field inside the sphere is (surprisingly) *uniform*:

$$\mathbf{E} = \frac{3}{\epsilon_r + 2} \mathbf{E}_0. \tag{4.49}$$

(d)



- Campo uniforme no interior da esfera (Mas com módulo diferente de $\vec{E}_0$).
- Campo sofre deformação no exterior.